ＭＢ　関数解析学　線形作用素の理論　講義報告[1]

２００８年5月１０日（土）　１４：００－１６：００

Banach空間 の定義と、Norm空間 が Banach空間 になるための必要十分条件を証明した。つぎに、線形空間に二つのノルムが与えられているとき、二つのノルムが同値であることの定義をし、有限次元のノルム空間のノルムが全て同値になることを示した。

1　線形作用素の理論

1.1　Norm空間・Banach空間

定義 1.1. (V,η) が *Norm*空間 であるとき、(V,η) が *Banach*空間 であるとは、η による距離空間 (V,d_η) が列完備であることである。

定理 1.1. *Norm*空間 $(V,\|\ \|)$ が *Banach*空間 であるための必要十分条件は、点列 $\varphi:\mathbb{N}\to V$ が $\sum_\nu \|\varphi(\nu)\|<\infty$ を満たすならば、級数 $\sum_\nu \varphi(\nu)$ が収束して、

$$\left\|\sum_\nu \varphi(\nu)\right\| \leq \sum_\nu \|\varphi(\nu)\|$$

が成立することである。

定義 1.2. V 上の二つのノルム $\eta_1,\eta_2:V\to\mathbb{R}$ に対して、$\alpha\geq 0,\ \beta\geq 0$ が存在して、

$$\alpha\eta_1(v)\leq\eta_2(v)\leq\beta\eta_2(v)\quad for\ \forall v\in V$$

が成立するとき、η_1 と η_2 は V 上の**同値なノルム**と言う。

練習問題 1.1. $\eta_1,\eta_2:V\to\mathbb{R}$ を V 上の同値なノルムとするとき、

1. $\varphi:\mathbb{N}\to V$ を V の点列とするとき、

$$\varphi(\nu)\to\varphi\ in\ \eta_1 \Leftrightarrow \varphi(\nu)\to\varphi\ in\ \eta_2$$

2. η_1- 開集合系と η_2- 開集合系は一致する。

定理 1.2. 有限次元のノルム空間 V のノルムは全て同値である。

証明. $\mathfrak{B}^*=\{b_1^*,b_2^*,\cdots,b_n^*\}$ をノルム空間 V の基底 $\mathfrak{B}=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ の双対基底とするとき、

$$\langle v,w\rangle_{\mathfrak{B}}=\sum_{\nu=1}^n b_\nu^*(v)b_\nu^*(w)$$

は V 上の内積になる。この内積から導かれるノルム $\eta_{\mathfrak{B}}(v)=\sqrt{\langle v,v\rangle_{\mathfrak{B}}}$ が V の任意のノルム η と同値であることを示せばいい。そのために、ノルム $\eta_{\mathfrak{B}}$ による閉球が

$$B_1^*(0)=\left\{v\in V\ \middle|\ \sum_{\nu=1}^n |b_\nu^*(v)|^2\leq 1\right\}$$

が点列コンパクトになることに注意し、「連続関数の最大値の定理」を用いる。 □

[1]数学工房　http://www.sugakukobo.com/